PROBLEMES

Presentació

El curs 1992/93 la SCM, preocupada per una disminució ostensible de la qualitat dels participants a les Olimpíades Matemàtiques, va convocar una trobada, oberta als socis i també al professorat dels centres d'Ensenyament Secundari , en la qual es va analitzar el problema. D'aquesta trobada va sorgir la idea d'endegar una sèrie de sessions al voltant de la resolució de problemes, que la SCM va impulsar decididament: així va néixer el *Fòrum de Problemes*, com s'ha conegut des de llavors. Ja s'ha celebrat durant dos cursos, s'han editat dos fascicles de problemes amb solucions i està en fase de preparació el fòrum d'enguany.

En el rerafons d'aquest Fòrum de Problemes, hi havia dues idees bàsiques:

- Aconseguir "despertar" professors i alumnes --tothom hi podia assistir-- per tal d'augmentar la quantitat i la qualitat de la participació a la fase catalana de l'Olimpíada Matemàtica.
- Agrupar totes aquelles persones que volguessin compartir amb d'altres el "gust" de fer problemes.

Val a dir que, malgrat que la participació no va ser massiva, els objectius es van acomplir, almenys parcialment, i és per això que el Fòrum de Problemes té continuïtat.

Per altra banda, la SCM va encarregar al Prof. J. GRANÉ l'organització d'unes sessions preparatòries per a les Olimpíades, adreçades a tots aquells estudiants de secundària de Catalunya que hi volguessin participar. Durant el primer trimestre del curs 1994/95 s'ha celebrat la segona edició d'aquestes sessions de preparació, que sembla que comencen a donar el seu fruit. Esperem que, en celebrar-se la tercera edició, podrem trametre a tots els associats la publicació que cada any es lliura gratuïtament a tots els alumnes participants i als Centres de Secundària que ho demanen.

Aquesta secció de SCM/Notícies pretén, modestament, d'emmarcar-se dintre de la línia del Fòrum i de la preparació de les Olimpíades i, al costat dels problemes proposats enguany a l'Olimpíada, n'hi trobareu d'altres.
Encoratgem a tothom a trametre solucions dels problemes proposats i a proposar-ne de nous; així aquesta secció esdevindrà, realment, una extensió del Fòrum.
Podeu fer-ho a través dels mitjans de comunicació (carta, fax, e-mail) que s'indiquen a la portada.

Ens sembla que per als problemes d'aquesta secció podríem establir, grosso-modo, tres classes de problemes:
Tipus A: problemes típics del tipus "olímpic", a l'abast dels estudiants de COU interessats per les Matemàtiques.
Tipus B: problemes de les llicenciatures de matemàtiques o d'altres carreres científiques o tècniques, del nivell dels proposats en exàmens de primer cicle.
Tipus C: Ídem, en exàmens de segon cicle.

Aquí van uns problemes per a començar; els tres primers són de cursos de preparació de l'equip olímpic a la Unió Soviètica, el quart és de la 34th IMO (juliol de 1993, Istanbul), i el darrer de la XIX Olimpíada Iberoamericana (setembre de 1994, Brasil):

Problemes proposats

A1. Demostreu que si a, b i c són enters senars, les arrels de l'equació
$$ax^2+bx+c=0$$
són, forçosament, nombres irracionals.

A2. Demostreu que si α_1 i α_2 són les arrels de l'equació
$$x^2-6x+1=0$$
llavors, per a tot $n \in \mathrm{N}$, $\alpha_1^n+\alpha_2^n$ és un enter no divisible per 5.

A3. Demostreu que, per a tot primer $p>2$, el numerador m de la fracció
$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}$$
és divisible per p. (Teorema de Wolstenholme).

A4. Tenim $n > 1$ llums disposats en forma circular $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$. Un llum pot estar encès o apagat. A partir de L_0 es fa una successió d'accions S_j de la següent forma:

i) L'acció S_j afecta només el llum L_j (l'estat dels altres no canvia).

ii) Si L_{j-1} és encès, S_j canvia l'estat de L_j.

iii) Si L_{j-1} és apagat, S_j no canvia l'estat de L_j.

Els llums estan indexats mòdul n. Inicialment els llums estan encesos. Demostreu:

a) Existeix un enter positiu $M(n)$ tal que després de $M(n)$ passos tos els llums tornen a estar encesos.

b) Si $n = 2^k$, llavors $M(n) = n^2 - 1$.

c) Si $n = 2^k + 1$, llavors $M(n) = n^2 - n + 1$.

A5. A cada casella d'un escaquer $n \times n$ hi ha un llum. En ser tocat un llum, aquest llum i tots els situats a la seva fila i columna canvien d'estat (passen d'apagat a encès i recíprocament). Inicialment són tots apagats. Demostreu que sempre és possible, amb una successió escaient de tocs, que tot l'escaquer quedi encès, i calculeu, en funció de n, el nombre mínim de tocs per tal que s'encenguin tots els llums.

Per a més problemes, podeu veure la
EMS/NEWSLETER
que a partir del número 12 (juny de 1994) ha iniciat un "*Problem Corner*", a càrrec de Paul Jainte. Posteriorment han sortit els números 13 (setembre) i 14 (desembre).

Problemes proposats a la XXXI Olimpíada Matemàtica

Primera sessió, 13 de gener, de 16 a 20 hores

1) Donat un triangle isòsceles de base 2 i altura 2, trobeu les paràboles tangents als costats iguals del triangle isòsceles tals que l'àrea que tanquin amb la base del triangle sigui màxima i mínima.

2) Sigui $N = abc_{(n}$ un nombre escrit en el sistema de numeració de base n, on $0 \le a, b, c \le n-1$ i on a, b, c són diferents entre ells i de zero. Formeu els nombres en base n que s'obtenen permutant de totes les maneres possibles les xifres a, b, c. Demostreu que la suma d'aquests nombres és divisible per $111_{(n}$. Generalitzeu l'enunciat del problema a nombres de p xifres escrits en base n.

3) Donat un triangle ABC i un punt M sobre AC, busqueu un punt N damunt d'un dels altres costats de manera que el segment MN divideixi el triangle en dues parts que tinguin la mateixa àrea.

4) Tenim dos daus perfectes normals. Volem canviar les puntuacions de cadascuna de les cares dels dos daus de manera que les probabilitats d'aconseguir els resultats 2 a 12, llançant-los simultàniament, sigui la mateixa que s'esdevindria usant els dos daus donats inicialment. A les noves puntuacions dels daus es permet la repetició d'una mateixa puntuació en dues cares, així com la utilització de puntuacions superiors al 6, però no s'accepta pas el 0. És possible de fer això?

Segona sessió, 14 de gener de 9 a 13 hores.

5) Siguin $[a,b]$, $[c,d]$ dos intervals tancats de R. Siguin $x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_n$ nombres reals que compleixen

$$a = x_0, x_1 < \ldots < x_n = b$$
$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$$

Proveu que si cadascun dels n^2 rectangles de R^2

$$[x_i, x_{i-1}] \times [y_i, y_{i-1}] \quad (0 \le i, j \le n-1)$$

té un costat de longitud entera, llavors el rectangle gran $[a,b] \times [c,d]$ també té un costat de longitud entera.

6) a) Proveu que si A, B, C són els angles d'un triangle, es compleix la igualtat

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \ \tan B \ \tan C.$$

b) Suposeu que tres arrels de l'equació polinòmica

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0 \qquad (\#)$$

són $\tan A$, $\tan B$ i $\tan C$, on A, B, C són els tres angles d'un triangle. Busqueu la quarta arrel en funció solament dels coeficients p, q, r, s del polinomi (#).

7) Busqueu una fórmula general que permeti conèixer còmodament les hores en les quals la busca horària d'un rellotge i la minutera formen un angle recte. Comproveu aquesta fórmula general per a les tres i les nou.

8) Sigui $ABCD$ un rectangle; dividim el costat AB en p parts iguals i el costat AD en q parts iguals, amb p, q enters senars, i considerem la quadrícula resultant.

a) Calculeu el nombre de camins de longitud mínima per la quadrícula que van del vèrtex A al seu vèrtex oposat C.

b) Cadascun d'aquests camins tanca amb els costats AB i BC una certa àrea. Calculeu la suma d'aquestes àrees.

c) Si m és la mitjana aritmètica d'aquestes àrees, es demana quants camins tanquen aquesta àrea m.